Uwagi ogólne

Co tutaj jest? Poniżej można znaleźć zadania, które omawiamy na ćwiczeniach. Są tutaj również zadania jedynie sformułowane podczas zajęć, jak i takie, o których w ogóle nie wspominaliśmy – polecam zwrócić uwagę również na nie, zwłaszcza przy przygotowaniu do egzaminu.

Czego tu nie ma? Z pewnością nie jest to pełnoprawny zbiór zadań zawierający *wszystkie typowe zadania egzaminacyjne*, cokolwiek to znaczy. Z jeszcze większą pewnością nie jest to skrypt.

Zawsze i wszędzie polecam skrypt Pawła Strzeleckiego, do znalezienia na jego stronie:
https://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/teaching.html
Pomocny (zwłaszcza w kontekście rozwiązywania zadań) może też być skrypt Michała Krycha, również dostępny na stronie autora:
https://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM2skrypt/

Normy

Definicja. Normą nazwiemy każdą funkcję $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki

1. $\|v\| \geqslant 0$; $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $v = 0$;
2. (jednorodność) $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$;
3. (nierówność trójkąta) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

Przykłady.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{dla } p \geqslant 1,$$

w szczególności

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Zadanie 1. Sprawdzić, że $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ spełniają aksjomaty normy.

Zadanie 2. W wymiarze $n = 2$, narysować kulę jednostkową

$$\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leqslant 1\}$$

dla $p = 1, 2, \infty$, oraz naszkicować ją dla pozostałych $p \geqslant 1$.

Zadanie 3. Wykazać, że przekształcenie liniowe $T(x,y) = (x - y, x + y)$ spełnia tożsamość $\|Tv\|_\infty = \|v\|_1$.
Wskazówka. Sprawdzić, że T przeprowadza kulę jednostkową na kulę jednostkową.

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieje przekształcenie liniowe $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające $\|Tv\|_\infty = \|v\|_1$.

Zadanie 5. Wykazać, że dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ kula jednostkowa $\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ jest zbiorem wypukłym symetrycznym względem zera, a przecięcie $\overline{B}(0,1)$ z dowolną prostą przechodzącą przez zero daje odcinek domknięty o skończonej dodatniej długości.

Zadanie 6. ★ Wykazać, że jeśli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym symetrycznym względem zera, a przecięcie K z dowolną prostą przechodzącą przez zero daje odcinek domknięty o skończonej dodatniej długości, to istnieje norma $\|\cdot\|$, dla której K jest kulą jednostkową.

Równoważność norm

Definicja. Norma $\|\cdot\|_a$ jest silniejsza od $\|\cdot\|_b$ (piszemy $\|\cdot\|_b \lesssim \|\cdot\|_a$), jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\|x\|_b \leqslant C\|x\|_a \quad \text{dla wszystkich } x.$$

Normy $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ nazwiemy równoważnymi (piszemy $\|\cdot\|_a \approx \|\cdot\|_b$), jeśli $\|\cdot\|_b \lesssim \|\cdot\|_a$ oraz $\|\cdot\|_a \lesssim \|\cdot\|_b$.

Zadanie 1. ☗ Sprawdzić równoważność norm $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.
Wskazówka. Być może najłatwiej jest wykazać ciąg nierówności $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.

Zadanie 2. Według definicji ciąg $x_k \in \mathbb{R}^n$ zbiega do $x \in \mathbb{R}$ względem normy $\|\cdot\|$ (piszemy $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$), jeśli ciąg liczb $\|x_k - x\|$ zbiega do zera. Wykazać, że

$$\|\cdot\|_b \lesssim \|\cdot\|_a \quad \Longrightarrow \quad \left(x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_a} x \Rightarrow x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_b} x\right).$$

Zadanie 3. ☗ Wykazać, że dla dowolnego niezerowego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja

$$f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|_p$$

jest malejąca. Wywnioskować, że wszystkie normy $\|\cdot\|_p$ są równoważne.

Zadanie 4. ★ Wykazać, że wszystkie normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

Norma $\|\cdot\|_p$

Cel: pokażemy, że

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

rzeczywiście jest normą dla $p \geqslant 1$. Wątpliwość budzi jedynie nierówność trójkąta. Przyjmiemy teraz, że $p > 1$, a $q = \frac{p}{p-1}$ jest tak dobrane, by $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Większość ze stwierdzeń poniżej jest prawdziwych również dla $p = 1$ i $q = \infty$, ale dla wygody ograniczymy się do skończonych wartości.

Zadanie 1. (nierówność Younga) Dla $a, b \geqslant 0$ mamy

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Zadanie 2. (nierówność Höldera) Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q,$$

gdzie $\cdot$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$. Wywnioskować, że

$$\|x\|_p = \sup_{\|y\|_q \leqslant 1} x \cdot y.$$

Zadanie 3. ★ (nierówność Minkowskiego, wersja ogólna) Jeśli dana jest macierz a_{ij} oraz dwa wykładniki $p \leqslant r$, to

$$\left\| \|a\|_{l_i^p} \right\|_{l_j^r} \leqslant \left\| \|a\|_{l_j^r} \right\|_{l_i^p},$$

gdzie l_i^p oznacza wzięcie normy $\|\cdot\|_p$ względem indeksu i.
Wskazówka. Po rozwinięciu lewej strony można zauważyć normę $\|c\|_{l_j^{r/p}}$ dla pewnego ciągu c_j. Warto ją przedstawić w formie

$$\|c\|_{l_j^{r/p}} = \sup_{\|b\|_{l_j^s}} b_j c_j \quad \text{dla } s = \frac{r}{r-p}.$$

Zadanie 4. (nierówność Minkowskiego) Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

Normy macierzowe

Oznaczenia. Dla przekształcenia liniowego $L\colon (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ między unormowanymi przestrzeniami liniowymi definiujemy *normę operatorową*

$$\|L\|_{V\to W} := \sup\Big\{\|Lv\|_W :\ v \in V,\ \|v\|_V = 1\Big\}.$$

Dla przestrzeni skończenie wymiarowych zawsze jest to wielkość skończona. Dla $\mathbb{R}^n$ domyślnie przyjmujemy normę euklidesową $\|\cdot\|_2$.
Gdy $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma w bazach standardowych macierz (a_{ij}), możemy utożsamić przestrzeć macierzy $M_{m\times n}$ z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}_{nm}$ przez przepisanie współczynników a_{ij} w jakiejś kolejności. Daje to normę

$$\|L\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_i \|Le_i\|^2},$$

znaną jako *norma Hilberta-Schmidta* (w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych też bywa ona używana).

Zadanie 1. Obliczyć normy $\|\cdot\|_2$ oraz $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2}$ dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka. Można wszystkie rachunki przeprowadzić na palcach, ale warto sprowadzić B do postaci diagonalnej C i uzasadnić równość $\|B\|_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2} = \|C\|_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2}$.

Zadanie 2. Wyprowadzić następującą charakteryzację normy operatorowej: $\|L\|_{V\to W}$ jest najmniejszą liczbą $K \geqslant 0$ spełniającą nierówność $\|Lv\|_W \leqslant K\|v\|_V$ dla dowolnego $v \in V$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że norma operatorowa spełnia nierówność

$$\|L_2L_1\|_{U\to W} \leqslant \|L_2\|_{V\to W}\|L_1\|_{U\to V} \quad \text{dla } (U, \|\cdot\|_U) \xrightarrow{L_1} (V, \|\cdot\|_V) \xrightarrow{L_2} (W, \|\cdot\|_W).$$

Skądinąd norma Hilberta-Schmidta też.

Zadanie 4. Wykazać, że dla $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mamy nierówność

$$\|L\|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} \leqslant \|L\|_2.$$

Warto zauważyć, że nierówność $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} \lesssim \|\cdot\|_2$ wynika z ogólnej teorii (równoważność norm w przestrzeniach skończenie wymiarowych), ale powyżej otrzymujemy tę nierówność ze stałą 1.
Wskazówka. Wyprowadzić następującą postać nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$\left\|\sum_i \alpha_i v_i\right\|_2^2 \leqslant \left(\sum_i \alpha_i^2\right)\left(\sum_i \|v_i\|_2^2\right).$$

Zbiory otwarte, domknięte i inne

Zadanie 1. Dla każdego z poniższych zbiorów rozstrzygnąć, czy jest on otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, wypukły, spójny.

- $\{(x, y) : \ |x| - |y| \leqslant 1\}$
- $\{(x, y) : \ x^2 + 2x + y^2 - 4y \geqslant -1, \ 9x^2 + 16y^2 \leqslant 144\}$
- $\{(x, y, z) : \ x, y, z \geqslant 0, \ x + 2y + 3z = 6\}$
- $\{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \leqslant 4z^2, \ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$
- $\{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \geqslant 4z^2, \ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$
- $\{(x, y, z) : \ xy \leqslant 0, \ x^2 + z^2 \leqslant 1\}$

Zadanie 2. Wykazać, że następujące warunki na funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ są równoważne:

- funkcja f jest ciągła;
- dla każdego zbioru otwartego $G \subseteq \mathbb{R}^m$, zbiór $f^{-1}(G) \subseteq \mathbb{R}^n$ również jest otwarty;
- dla każdego zbioru domnkniętego $F \subseteq \mathbb{R}^m$, zbiór $f^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R}^n$ również jest domknięty.

Zadanie 3. Znaleźć przykład

- funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbioru otwartego $G \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $f(G) \subseteq \mathbb{R}$ nie jest otwarty;
- funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbioru domkniętego $F \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $f(F) \subseteq \mathbb{R}$ nie jest domknięty.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła, a zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to zbiór $f(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ również jest zwarty.
Wskazówka. Skorzystać z innej charakteryzacji zwartości.

Zadanie 5. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nieciągłej w punkcie 0, ale której wykres $\{(x, y) : y = f(x)\}$ jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^2$.

Granica i ciągłość funkcji

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy istnieją, i ewentualnie wyznaczyć granice

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5-y^5}{x-y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp(-x^2-y^2)-1}{\sin(x^2+y^2)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sin(x^2+y^2)}$$

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y = \exp(y\ln x)$. Rozstrzygnąć, czy istnieją, i ewentualnie wyznaczyć granice

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Uzasadnić, że istnieje ciągłe przedłużenie $\overline{f}\colon [0,\infty)^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, ale ciągłe przedłużenie $\overline{f}\colon (0,\infty)^2 \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ już nie.

Zadanie 3. Dla każdej z funkcji

$$f(x,y) = \frac{y^2}{y^2+(x-y^2)^2}, \qquad g(x,y) = (x+y)\cdot f(x,y),$$

$$h(x,y) = |x|^{\ln|y|}, \qquad k(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \qquad l(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

zbadać

- granice iterowane $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}$;
- granicę w $(0,0)$ wzdłuż prostej opisanej równaniem $Ax+By=0$;
- granicę $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$;
- granicę $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty}$.

Zadanie 4. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanych wzorami

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{poza } (0,0) \\ 0 & \text{w } (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y} & \text{dla } y \neq x^3 \\ 1 & \text{dla } y = x^3 \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} |yx^{-2}|e^{-|yx^{-2}|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zadanie 5. Sprawdzić, że mnożenie macierzy

$$M_{m\times n} \times M_{k\times m} \ni (A, B) \mapsto A \cdot B \in M_{k\times n}$$

jest funkcją ciągłą.

Zadanie 6. Sprawdzić, że odwracanie macierzy

$$\{B \in M_{n\times n} : \det B \neq 0\} \ni A \mapsto A^{-1} \in M_{n\times n}$$

jest funkcją ciągłą. Uzasadnić, że dziedzina tej operacji jest otwartym i gęstym podzbiorem $M_{n\times n}$, ale jest niespójna.

Pochodne cząstkowe i różniczkowalność

Zadanie 1. Każdy z poniższych warunków jest coraz słabszy, tzn. zachodzą implikacje w dół $\Downarrow$. Podać przykłady pokazujące, że nie zachodzi żadna z implikacji w górę $\Uparrow$.

- pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ istnieją w otoczeniu p oraz są ciągłe w punkcie p
- funkcja f jest różniczkowalna w p
- dla każdego wektora $w \in \mathbb{R}^n$ istnieje pochodna kierunkowa $f_w(p)$ i zależy ona liniowo od w, ponadto f jest ciągła w p
- $f_w(p)$ istnieje dla każdego wektora $w \in \mathbb{R}^n$ i zależy liniowo od w
- $f_w(p)$ istnieje dla każdego wektora $w \in \mathbb{R}^n$
- pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ istnieją w p

Zadanie 2. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $f\colon (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x,y,z) = z \cdot x^y$.

Zadanie 3. Dane jest przekształcenie dwuliniowe $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wyznaczyć różniczkę funkcji $f(x) = B(x,x)$.

Zadanie 4. Niech $f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$. Udowodnić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto D_x f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

jest izomorfizmem liniowym.

Zadanie 5. Dla jakich $\alpha \geqslant 0$ funkcja

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\alpha}$$

jest różniczkowalna w punkcie $0 \in \mathbb{R}^n$?

Zadanie 6. Dla każdej z funkcji wyznaczyć wszystkie punkty płaszczyzny, w których jest ona różniczkowalna:

$$f(x,y) = |e^x - y|(e^x - 1) \qquad g(x,y) = \frac{xy}{1+|x-y|}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} (e^{xy}-1)/y & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases} \qquad k(x,y) = \ln(1+|xy|^p) \ (p>0)$$

Zadanie 7. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mającej wszędzie określone pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ale nieciągłej w zerze.

Zadanie 8. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma w punkcie 0 niezerową różniczkę. Znaleźć (np. wyrazić przez pochodne cząstkowe) wektor jednostkowy $v \in \mathbb{R}^n$, dla którego $d_0 f(v)$ przyjmuje największą wartość.

Zadanie 9. Niech

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1,\dots,x_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że pochodna kierunkowa f w kierunku $w = (1,\dots,1)$ jest zerowa: $\partial_w f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

Interludium – różniczkowanie macierzy

Zadanie 1. Wykazać, że różniczką przekształcenia $\det\colon M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ w macierzy jednostkowej I jest ślad:

$$D_I \det(A) = \operatorname{tr} A,$$

natomiast w dowolnej macierzy odwracalnej $B \in M_{n\times n}$ mamy

$$D_B \det(A) = (\det B) \cdot \operatorname{tr}(B^{-1}A).$$

Zadanie 2. Dla n funkcji $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ wprowadźmy funkcję

$$A_{f_1,f_2,\ldots,f_n}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A_{f_1,f_2,\ldots,f_n}(t) := \det(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)),$$

która bierze wyznacznik z macierzy mającej te funkcje w kolejnych kolumnach. Wyprowadzić wzór

$$\frac{d}{dt} A_{f_1,f_2,\ldots,f_n} = A_{f_1',f_2,\ldots,f_n} + A_{f_1,f_2',\ldots,f_n} + \ldots + A_{f_1,f_2,\ldots,f_n'}.$$

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $B \in M_{n\times n}$ jest macierzą o normie operatorowej $\|B\|_{2\to 2} < 1$, to macierz $I - B$ jest odwracalna oraz

$$(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Zadanie 4. Wykorzystając poprzednie zadanie, wyprowadzić wzór na różniczkę odwracania macierzy. Wprowadźmy mianowicie

$$GL_n := \{A \in M_{n\times n} : \det A \neq 0\}, \quad i\colon GL_n \to GL_n, \quad i(A) = A^{-1}.$$

Wykazać, że wówczas $D_I i(B) = -B$ oraz ogólnie

$$D_A i(B) = -A^{-1}BA \quad \text{dla } A \in GL_n.$$

Zadanie 5. Korzystając z zupełności przestrzeni $M_{n\times n}$ (np. z normą operatorową), uzasadnić dobrą określoność funkcji eksponencjalnej

$$\exp\colon M_{n\times n} \to M_{n\times n}, \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Przy założeniu przemienności macierzy A i B (czyli równości $AB = BA$) wyprowadzić wzory

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}, \quad \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Pochodna złożenia i reguła łańcuchowa

Twierdzenie o pochodnej złożenia. Jeśli funkcje $\mathbb{R}^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$ są różniczkowalne odpowiednio w punktach $x \in \mathbb{R}^k$ i $f(x) \in \mathbb{R}^l$, to ich złożenie $h := g \circ f$ jest różniczkowalne w x oraz

$$D_x h = D_{f(x)} g \circ D_x f.$$

Reguła łańcuchowa (to samo, tylko inaczej). Przyjmijmy f, g, h jak wyżej. Oznaczmy współrzędne w $\mathbb{R}^k$ przez $(x_1, \dots, x_k)$ i współrzędne w $\mathbb{R}^l$ przez $(y_1, \dots, y_l)$, ponadto przyjmijmy $f = (f^1, \dots, f^l)$, $g = (g^1, \dots, g^m)$ i $h = (h^1, \dots, h^m)$ (gdzie każda z funkcji f^i, g^i, h^i ma wartości w $\mathbb{R}$). Wówczas

$$\frac{\partial h^i}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial g^i}{\partial y_s}(f(x)) \cdot \frac{\partial f^s}{\partial x_i}(x) \quad \text{dla } i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, m.$$

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$ są zbiorami otwartymi, a przekształcenie różniczkowalne $f\colon U \to V$ posiada różniczkowalne przekształcenie odwrotne, to $D_x f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest odwracalnym przekształceniem liniowym dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$. Wywnioskować, że $n = m$.
Uwaga. W niedalekiej przyszłości wykażemy (przy pewnych dodatkowych założeniach) przeciwne wynikanie – z odwracalności różniczki wynika lokalna odwracalność przekształcenia.

Zadanie 2. Dla podanych funkcji f, g oraz $h = g \circ f$ wyznaczyć różniczki i sprawdzić, że zachodzi równość $Dh = DgDf$.

a) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$,	$f(x) = (x, \sqrt{x})$,	$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,	$g(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,	$f(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$,	$g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,	$g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
c) $f\colon M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$,	$f(A) = A^2$,	$g\colon M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$,	$g(A) = \det A$.

Zadanie 3. Niech A będzie ustaloną macierzą 2×2 oraz

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, e^{x^2 - y^2} \right).$$

Znaleźć $D(F \circ A)$ oraz $D(A \circ F)$ w punkcie $(1,1)$.

Uwaga. Następne cztery zadania ilustrują tzw. *metodę charakterystyk*, która pozwala z pewnych równań różniczkowych cząstkowych wnioskować o geometrii rozwiązań. Zainteresowanych odsyłam do książki L.C. Evansa *Równania różniczkowe cząstkowe* (rozdz. 3.2).

Zadanie 4. Funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geqslant 0 \quad \text{dla } x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Udowodnić, że jest ona ograniczona z dołu.
Wskazówka. Przy ustalonym $x \in \mathbb{R}^n$ rozważyć funkcję pomocniczą $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $h(t) = f(tx)$ i zbadać jej monotoniczność.

Zadanie 5. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełniona jest tożsamość $2y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}$. Wykazać, że istnieje funkcja $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ spełniająca tożsamość $f(x,y) = g(x^2 + 2y^2)$.
Wskazówka. Dla ustalonego $r \geqslant 0$ rozważyć funkcję pomocniczą

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(r\cos t, \frac{r}{\sqrt{2}}\sin t\right),$$

czyli parametryzację elipsy $x^2 + 2y^2 = r^2$. Wykazać, że złożenie $h(t) = f(\gamma(t))$ daje funkcję stałą.

Zadanie 6. ☗ Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia tożsamość

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 7y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Dowieść, że istnieje funkcja różniczkowalna $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ spełniająca tożsamość $f(x,y) = g(x^7 y)$.
Wskazówka. Jeśli teza jest prawdziwa, to funkcja $f(x/t, t^7 y)$ nie zależy od t. Sprawdzić, że to samo wynika z założonej tożsamości.

Zadanie 7. ☗ Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i spełnia tożsamości

$$f(0,y) = y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Wyznaczyć f jawnym wzorem.
Wskazówka. Znaleźć funkcję $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającą $\gamma_1' = 1$, $\gamma_2' = -\gamma_2$ (jest takich cała rodzina), a następnie rozważyć złożenie $h(t) = f(\gamma(t))$.

W poszukiwaniu kresu

Twierdzenie. Jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty, a funkcja różniczkowalna $f\colon U \to \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w $x \in U$, to $D_x f = 0$.

Twierdzenie. Jeśli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty, a funkcja $f\colon K \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f jest ograniczona na K i gdzieś w tym zbiorze przyjmuje swoje ekstrema.

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$h\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = xy\ln(x^2+y^2).$$

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne oraz wyznaczyć kresy funkcji

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2+y^2-4xy,$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = 2x^2+10y^2-6xy-2x+4y+5,$$

Zadanie 3. Znaleźć kresy funkcji

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$
$$g\colon [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = xy^2e^{-x-2y},$$
$$h\colon [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = (2x+3y)e^{-x-2y}.$$

Zadanie 4. Niech $f(x,y) = y^2+2x^4-3y^2$.

1. Sprawdzić, że dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ funkcja $g_v(t) = f(tv)$ ma minimum lokalne w zerze.
2. Sprawdzić, że zero nie jest minimum lokalnym f.
3. Znaleźć infimum f na zbiorze $\{|x|,|y| \leqslant 1\}$.

Zadanie 5. Niech $f(x,y) = x^2 + 2y^2(x+1)^3$, oznaczmy też kostkę o boku $2r$: $Q_r := \{|x|, |y| \leqslant r\}$. Znaleźć kresy f na zbiorze

$$\text{a) } Q_1; \qquad \text{b) } Q_2; \qquad \text{c) } \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 6. Znaleźć kresy funkcji $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ na kole jednostkowym $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Zadanie 7. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną zadaną wzorem $2x - 3y + z = 1$. Znaleźć punkt $(x,y,z) \in A$ położony najbliżej punktu $p = (3,2,-1)$.
Wskazówka. Sparametryzować płaszczyznę A, tj. znaleźć funkcję "na" $q\colon \mathbb{R}^2 \to A$, a następnie zminimalizować funkcję $|q-p|^2$.

Zadanie 8. Dane są zbiory

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+14)^2 + \left(y - \tfrac{5}{2}\right)^2 = 1\} && \text{(okrąg)},\\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x-2)^2 + 2\} && \text{(parabola)}. \end{aligned}$$

Znaleźć odległość między tymi zbiorami, czyli infimum $\inf\{\|p-q\| : p \in A,\ q \in B\}$.
W celach ćwiczeniowych porównać następujące dwie strategie:

- Wykorzystać parametryzacje okręgu $\gamma(t) = \left(-14 + \cos t, \frac{5}{2} + \sin t\right)$ i paraboli $\eta(s) = (s, (s-2)^2+2)$ i zminimalizować funkcję pomocniczą $f(t,s) = \|\gamma(t) - \eta(s)\|^2$.
- Wziąć najpierw infimum po wszystkich $p \in A$. Rozważyć funkcję pomocniczą $g(s) = \|\eta(s) - (0,1)\|^2$ i wykazać jej związek z infimum po $q \in B$.

Zadanie 9. Znaleźć prostopadłościan o najmniejszej powierzchni całkowitej wśród prostopadłościanów o ustalonej objętości V.
Czy istnieje wśród nich prostopadłościan o najmniejszej powierzchni bocznej?

Zadanie 10. ★ Spośród płaszczyzn przechodzących przez środek sześcianu, która daje największe pole przekroju?

Symetria drugiej różniczki

Zadanie 1. (Peano 1884; przykład braku symetrii) Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{poza } 0, \\ 0 & \text{w } 0. \end{cases}$$

Wykazać, że

1. Funkcja f jest klasy C^1 na $\mathbb{R}^2$, a punkt $(0,0)$ jest punktem krytycznym f.
2. W punkcie $(0,0)$ istnieją pochodne cząstkowe drugiego rzędu $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$, ale
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \neq \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).$$

Twierdzenie (Schwarza o symetrii drugiej różniczki). Niech $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie zbioru otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Jeśli druga różniczka $d^2 f(p)$ istnieje w jakimś punkcie $p \in \Omega$, to jest przekształceniem dwuliniowym **symetrycznym**.

Poniżej wykażemy słabszą wersję tego twierdzenia, mianowicie przy założeniu $f \in C^2$.

Zadanie 2. (przygotowawcze) Dana jest funkcja $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ oraz

$$H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad H(x,a,b) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Wyznaczyć pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial H}{\partial a}(x,a,b) = -f(x,a), \quad \frac{\partial H}{\partial b}(x,a,b) = f(x,b), \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x,a,b) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Wyprowadzić wzór

$$\frac{H(x+h,a,b)-H(x,a,b)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)\,\mathrm{d}t$$

i wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, by wykazać małość funkcji podcałkowej.

Zadanie 3. Niech $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Wykazać, że dla dowolnych $a, b, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

Wywnioskować, że $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ na $\mathbb{R}^2$.
Wskazówka. Zróżniczkować po y równość $f(b,y) - f(a,y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\,\mathrm{d}t$.

Zadanie 4. Znaleźć funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^2 spełniającą

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + e^x \cos y + 1.$$

Czy istnieje funkcja $g \in C^2$ spełniająca

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 + e^x \cos y + 1,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy^3 + e^x \sin y?$$

Zadanie 5. Czy istnieje funkcja $g \in C^1$ spełniająca warunki z poprzedniego zadania?
Wskazówka. Uzasadnić, że jeśli istnieje, to ma postać

$$g(x,y) = g(0,0) + \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial s}(x,s)\,\mathrm{d}s.$$

Zadanie 6. ⌂ Wykazać, że jeśli funkcje $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ spełniają zależność $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, to istnieje funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, dla której $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$. Innymi słowy, zgodność pochodnych mieszanych jest również warunkiem dostatecznym.
Wskazówka. Skorzystać ze wzoru z poprzedniego zadania.

Zadanie 7. ⌂ Sprawdzić, że funkcje $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ dane wzorami

$$f_1(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

spełniają zależność $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, ale nie istnieje funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, dla której $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$.
Wskazówka. Zbadać zachowanie funkcji okresowej $g(t) = f(\cos t, \sin t)$.

Uwaga. Powyższy fenomen (nieistnienie f o zadanych pochodnych cząstkowych, mimo spełnienia warunku koniecznego) jest związany z geometrią badanego obszaru, a ściślej, z tak zwanymi (pierwszymi) kohomologiami de Rhama H^1_{dR}. Można je będzie ściśle zdefiniować w następnym semestrze, po wprowadzeniu pojęć *formy różniczkowej* i *różniczki zewnętrznej*.
Rezultaty powyższych zadań można wówczas streścić następująco: kohomologie $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2)$ są trywialne, a kohomologie $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ nietrywialne.

Wielomian Taylora

Notacja wielowskaźnikowa. Wielowskaźnik $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to n-elementowy ciąg liczb naturalnych, czyli element zbioru $\mathbb{N}^n$ (tutaj zaliczamy 0 do liczb naturalnych). Dla wielowskaźnika α, wektora $x \in \mathbb{R}^n$ i funkcji $f \in C^k$ wprowadzamy oznaczenia:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \\
\alpha! &= \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!, \\
x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\
\partial^\alpha f &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_1}}_{\alpha_1 \text{ razy}} \cdots \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}}_{\alpha_n \text{ razy}} f.
\end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę, że ze względu na symetrię drugiej różniczki kolejność pochodnych cząstkowych nie ma znaczenia.

Związek z różniczkami wyższego rzędu (rozumianymi jako przekształcenia wieloliniowe) jest następujący:

$$\partial^\alpha f = d^{|\alpha|} f \left(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\alpha_1 \text{ razy}}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\alpha_n \text{ razy}} \right)$$

Wielomian Taylora. Zależnie od ulubionej notacji, wprowadzamy

$$\begin{aligned}
& T_k f(p, x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} d^l f(p)(x - p, \ldots, x - p) \\
\text{lub} \quad & T_k f(p, x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(p)(x - p)^\alpha.
\end{aligned}$$

Resztę $R_k f$ definiujemy jako funkcję spełniającą tzw. *wzór Taylora*

$$f(x) = T_k f(p, x) + R_k f(p, x).$$

Zadanie 1. (kombinatoryczne) Ustalmy $\alpha \in \mathbb{N}^n$ oraz $l = |\alpha|$. Wykazać, że zbiór $\{1, \ldots, l\}$ da się podzielić na n podzbiorów $A_1, \ldots, A_n$ o liczności $|A_j| = \alpha_j$ dokładnie na

$$\binom{l}{\alpha} = \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}$$

sposobów. Wywnioskować, że dwie powyższe definicje wielomianu Taylora dają ten sam wynik.

Zadanie 2. Niech $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ będzie wielomianem rzędu $\leqslant k$ spełniającym warunek

$$\lim_{x \to 0} \frac{p(x)}{\|x\|^k} = 0.$$

Wywnioskować, że własność Peano reszty $R_k f$ jednoznacznie wyznacza wielomian Taylora $T_k f$.
Wskazówka. Przedstawić p jako sumę wielomianów jednorodnych $\sum_{j=0}^{k} p_j$ i rozważyć zachowanie $p(tx)$ przy ustalonym $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \to 0$.

Zadanie 3. Wykazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Wskazówka. Przyjąć lewą stronę za funkcję f i uzasadnić równość $f(x) = T_k f(0, x)$.

Zadanie 4. Dla funkcji $f(x, y, z) = (\cos x + \sin y)e^z$ wyznaczyć wielomian Taylora $T_2 f(0, x)$ na trzy różne sposoby:

- Wyznaczając pochodne $f(0), df(0), d^2 f(0)$ i podstawiając do wzoru.
- Wyznaczając wszystkie pochodne $\partial^\alpha f(0)$ dla wielowskaźników $|\alpha| \leqslant 2$ i podstawiając do wzoru.
- Korzystając z rozwinięć

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \\ \sin y &= y + o(y^2), \\ e^z &= 1 + z + \frac{1}{2}z + o(z^2), \end{aligned}$$

  a następnie korzystając z jednoznaczności wielomianu posiadającego własność Peano.

Zadanie 5. Funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ spełnia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - e^{x-y}}{x^2+y^2} = 1.$$

Wyznaczyć wielomian Taylora $T_2 f(0,(x,y))$.

Zadanie 6. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Uzasadnić, że jeśli $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, to $d^2 f(0,0) = 0$.
Wskazać przykład funkcji $f \notin C^2$ spełniającej ten sam warunek, a dla której druga pochodna $d^2 f(0,0)$ w ogóle nie jest określona.

Zadanie 7. Funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ spełnia $df(0) = 0$ (jako przekształcenie liniowe) oraz $d^2 f(0) > 0$ (jako symetryczna forma dwuliniowa). Wykazać, że f ma w punkcie 0 ściśle lokalne minimum.
Wskazówka. Wybrać otoczenie, na którym reszta we wzorze Taylora spełnia
$|R_2 f(0,v)| < d^2 f(0)(v,v)$.

Postać całkowa reszty we wzorze Taylora

Zadanie 1. Dla wielomianu Taylora jednej zmiennej $T_n f(p,x)$, wyznaczyć pochodną cząstkową po p:

$$\frac{\partial}{\partial p} T_k f(p,x) = \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(p)(x-p)^k.$$

Wykorzystując równość $T_k f(x,x) = f(x)$, wywnioskować postać całkową reszty (dla $f \in C^{k+1}$):

$$\begin{aligned} R_k f(p,x) &= \int_p^x \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(s)(x-s)^k \, \mathrm{d}s \\ &= (x-p)^{k+1} \int_0^1 \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(p+t(x-p))(1-t)^k \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Wyprowadzić postać całkową reszty dla funkcji n zmiennych $f \in C^{k+1}$:

$$R_k f(p,x) = \sum_{|\alpha|=k+1} (x-p)^\alpha \int_0^1 \frac{k+1}{\alpha!} \partial^\alpha f(p+t(x-p))(1-t)^k \, \mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Skorzystać z postaci całkowej dla funkcji pomocniczej $g(t) = f(p+t(x-p))$ i sprawdzić, że

$$g^{(s)}(t) = \sum_{|\alpha|=s} \binom{s}{\alpha} \partial^s f(p+t(x-p))(x-p)^\alpha.$$

Zadanie 3. Dla funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $k \in \mathbb{N}$ wykazać równoważność trzech warunków:

1. f jest postaci
$$f(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} x^\alpha \varphi_\alpha(x)$$
dla pewnych gładkich funkcji φ_α;

2. f jest skończoną kombinacją liniową czynników postaci $\psi_1 \cdot \ldots \cdot \psi_{k+1}$, gdzie każda z funkcji ψ_j jest gładka i spełnia $\psi_j(0) = 0$;

3. $\partial^\alpha f(0) = 0$ dla wszystkich wielowskaźników $|\alpha| \leqslant k$;

Wskazówka. Implikacje $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ są proste, a $3 \Rightarrow 1$ korzysta ze wzoru Taylora.

Druga różniczka a lokalne ekstrema

Twierdzenie. Ustalmy funkcję $f \in C^2$ oraz jej punkt krytyczny p (tzn. punkt, w którym $df(p) = 0$). Wówczas

- Jeśli p jest lokalnym minimum, to $d^2f(p) \geqslant 0$.
- Jeśli p jest lokalnym maksimum, to $d^2f(p) \leqslant 0$.
- Jeśli $d^2f(p) > 0$, to p jest ścisłym lokalnym minimum.
- Jeśli $d^2f(p) < 0$, to p jest ścisłym lokalnym maksimum.
- Jeśli $d^2f(p)$ jest nieokreślona (czyli ani $\geqslant 0$ ani $\leqslant 0$), to p nie jest lokalnym ekstremum.
- W pozostałych przypadkach na dwoje babka wróżyła.

Kryterium Sylvestera. Dana jest macierz symetryczna $A \in M_{n\times n}$. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ przez A_k oznaczymy macierz złożoną z k pierwszych kolumn i wierszy A. Ogólniej, dla dowolnego niepustego podzbioru $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ przez A_S oznaczymy macierz złożoną z kolumn i wierszy o zadanych numerach. Wówczas

- $A > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A_k > 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$
- $A < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^k \det A_k > 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ (łatwiej: gdy $-A > 0$)
- $A \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\det A_S \geqslant 0$ dla każdego niepustego $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$
- $A \leqslant 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $(-1)^{|S|} \det A_S \geqslant 0$ dla każdego niepustego $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ (łatwiej: gdy $-A \geqslant 0$)

Zadanie 1. Dla każdej z poniższych macierzy symetrycznych podać jej „określoność” (do wyboru są opcje > 0, < 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$ oraz *nieokreślona*):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Zadanie 2. Funkcja

$$f\colon E \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy - x - y + 3$$

jest określona na trójkącie domkniętym $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$. Wykazać, że swoje kresy przyjmuje na brzegu trójkąta.

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= 3x^2 + 6xy + 2y^3 + 12x - 24y \\
f_2(x,y) &= e^{-x^4-y^4} \\
f_3(x,y) &= x^3 - 3xy^2 \\
f_4(x,y) &= x^3y - 3xy^2 \\
f_5(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z
\end{aligned}$$

Dla każdego z nich stwierdzić, czy jest to lokalne minimum, maksimum, albo żadne z tych dwóch.

Stożek styczny do zbioru

Definicja. Dany jest zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i punkt $p \in A$. Niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^n$ jest styczny do A w p (piszemy $v \in T_pA$), jeśli istnieje ciąg punktów $p_k \in A$ różnych od p spełniający

$$p_k \to p, \quad \frac{p_k - p}{\|p_k - p\|} \to \frac{v}{\|v\|}.$$

Ponadto przyjmujemy $0 \in T_pA$.

Uwaga terminologiczna. W powyższej ogólności zbiór T_pA nazywamy *stożkiem stycznym*. Jednak dla dostatecznie regularnego zbioru A jest to podprzestrzeń liniowa, i wówczas używamy nazwy *przestrzeń styczna*.

Zadanie 1. Sprawdzić, że T_pA jest zawsze stożkiem, to znaczy:

$$v \in T_pA,\ t \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad tv \in T_pA.$$

Zadanie 2. Uzasadnić wzór

$$T_p(A \cup B) = T_pA \cup T_pB \qquad \text{dla } p \in A \cap B.$$

Zadanie 3. Sprawdzić, że powyższy wzór jest prawdziwy jedynie dla skończonych sum. Dla przykładu, sprawdzić, że wektor $(1, 0)$ jest styczny do sumy prostych $A_k = \{y = x/k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ale nie jest styczny do żadnej z tych prostych.

Zadanie 4. Dany jest punkt $p \in A \cap B$. Wykazać, że jeśli zbiory A i B zgadzają się na jakimś otoczeniu p, to znaczy $A \cap \mathbf{B}_r(p) = B \cap \mathbf{B}_r(p)$ dla pewnego $r > 0$, to $T_pA = T_pB$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $p_k \to p$ jak w definicji wektora stycznego. Załóżmy ponadto, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k - p}{a_k} = v$$

dla pewnego dodatniego ciągu $a_k \to 0$ oraz niezerowego wektora $v \in \mathbb{R}^n$. Wykazać, że wówczas ciąg $\frac{\|p_k - p\|}{a_k}$ ma skończoną dodatnią granicę, a ciąg $\frac{p_k - p}{\|p_k - p\|}$ zbiega do wektora proporcjonalnego do v.

Zadanie 6. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją różniczkowalną w x_0, a

$$G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

jej wykresem. Wykazać, że

$$T_{(x_0,f(x_0))}G = \operatorname{im}(\operatorname{id} \times d_{x_o} f) = \{(v, d_{x_0} f(v)) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wskazówka. Dla punktu $p_k = (x_k, f(x_k))$ przyjąć $a_k = \|x_k - x_0\|$.

Zadanie 7. (a) Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $(n < k)$ będzie funkcją klasy C^1, a $I = \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^k$ jej obrazem. Wykazać, że

$$T_{f(x_0)}I \supseteq \operatorname{im} d_{x_0} f = \{d_{x_0} f(v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

(b) Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $(n > k)$ będzie funkcją klasy C^1, a $L = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ jej poziomicą (wyznaczoną przez wartość $f(x_0)$). Wykazać, że

$$T_{x_0}L \subseteq \ker d_{x_0} f = \{v \in \mathbb{R}^n : d_{x_0} f(v) = 0\}.$$

Uwaga. Twierdzenia o funkcji odwrotnej i uwikłanej (w skrócie TFO i TFU) pozwolą nam przy pewnych dodatkowych założeniach sprowadzić przypadki (a) i (b) (czyli obraz i poziomicę) do przypadku wykresu, oraz wykazać równość w obu zawieraniach.

Zadanie 8. W każdym punkcie zbioru

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0,\ x = 2y^2 + 3y + 4\}$$

wyznaczyć stożek styczny.

Zadanie 9. Wyznaczyć stożek styczny do elipsoidy

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\}$$

w punkcie $(-1, -1, -1)$.

Zadanie 10. Niech

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (e^y, e^{-2x}, e^{5x+9y}).$$

Wyznaczyć stożek styczny do zbioru $f(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ w punkcie $(1, 1, 1)$.

Zadanie 11. ☗ Niech $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ będzie zerową poziomicą funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{dla } y \leqslant 0, \\ x + y^2 & \text{dla } x \geqslant 0,\ y > 0 \\ x - y^2 & \text{dla } x < 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć $T_0 L$ i skonfrontować otrzymany wynik z podprzestrzenią $\ker d_0 f$.

Zadanie 12. Oznaczmy punkty $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$ i zdefiniujmy funkcje $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorami

$$f(p) = \|p - a\| + \|p - b\|, \quad g(p) = \|p - a\| - \|p - b\|.$$

1. Znaleźć punkty różniczkowalności funkcji f, g oraz znaleźć gradient $\nabla f, \nabla g$ w punktach, w których różniczka istnieje.

2. Dowieść, że poziomice funkcji f i g są wzajemnie ortogonalne. Dokładniej, pokazać, że jeśli p_0 jest wspólnym punktem różniczkowalności f i g, to stożki styczne do zbiorów

   $$\{p \in \mathbb{R}^2 : f(p) = f(p_0)\}, \quad \{p \in \mathbb{R}^2 : g(p) = g(p_0)\}$$

   stanowią dwie prostopadłe proste.

Zadanie 13. Rozważmy zbiór macierzy ortogonalnych

$$O(n) = \{Q \in M_{n\times n} : Q^T Q = I\}.$$

Opisać przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I.
Wskazówka. Wykorzystać zadania dotyczące obrazu i poziomicy. Najpierw przedstawić $O(n)$ jako poziomicę pewnej funkcji, a następnie sprawdzić, że funkcja

$$\exp \colon M_{n\times n} \to M_{n\times n}, \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

po ograniczeniu do odpowiedniej podprzestrzeni daje wartości w $O(n)$.

Twierdzenie o funkcji odwrotnej i uwikłanej I

Definicja. Niech $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ – dwa zbiory otwarte. Dyfeomorfizmem nazwiemy parę funkcji $f\colon U \to V$ i $g\colon V \to U$ klasy C^1 spełniającą $g \circ f = \mathrm{id}_U$ i $f \circ g = \mathrm{id}_V$. Nadużywając nieco terminologii, dyfeomorfizmem nazwiemy też jedną z tych funkcji (o ile oczywiście istnieje druga do pary).

Twierdzenie o funkcji odwrotnej. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1. Jeśli różniczka $df(p)$ w pewnym punkcie jest odwracalna, to f jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia p na pewne otoczenie $f(p)$.
Ponadto dla x i $y = f(x)$ w tych otoczeniach zachodzi $d(f^{-1})(y) = (df(x))^{-1}$.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Niech $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1. Przez $d_yF(x, y)$ oznaczmy różniczkę F po y, to znaczy różniczkę funkcji $F(x, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ w punkcie y (podobnie z d_xF).
Jeśli różniczka $d_yF(x_0, y_0)$ jest odwracalna, to istnieje otoczenie $(x_0, y_0) \in U \times V \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ oraz funkcja $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1, które spełniają

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) \iff y = h(x) \quad \text{dla } (x, y) \in (U, V).$$

Ponadto zachodzi $dh(x) = -(d_yF(x, h(x))^{-1} d_xF(x, h(x)))$.

Zadanie 1. W TFO i TFU wywnioskować wzory na różniczki f^{-1} i h ze wzoru na pochodną złożenia.
Wskazówka. Zróżniczkować odpowiednio $f^{-1}(f(x)) = x$ i $F(x, h(x)) = F(x_0, y_0)$.

Zadanie 2. Z TFO wywnioskować TFU, a nawet (formalnie mocniejszą) wersję, w której

$$F(x, y) = c \quad \iff \quad y = H(x, c).$$

Wskazówka. Rozważyć funkcję $f(x, y) = (x, F(x, y))$.

Zadanie 3. Z TFU wywnioskować TFO.
Wskazówka. Rozważyć funkję $F(x, y) = f(y) - x$.

Uwaga. Następne zadania pokazują konsekwencje TFO i TFU dla wyznaczania przestrzeni stycznych. Przy okazji pokazują, że twierdzenia te można stosować dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1, której różniczka jest *pełnego rzędu*, czyli rzędu $\min(n, k)$ (TFO dla $n \leqslant k$, TFU dla $n > k$).

Zadanie 4. Niech $f\colon U \to V$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 oraz niech $p \in A \subseteq U$. Wówczas

$$T_{f(p)} f(A) = df(p)\,(T_p A) = \{df(p) \cdot v : v \in T_p A\}.$$

Zadanie 5. Niech $F\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1, której różniczka $dF(p_0)$ jest pełnego rzędu (czyli rzędu n). Oznaczmy przez $L = \{p : F(p) = F(p_0)$ jej poziomicę. Wykazać, że wówczas

$$T_{p_0} L = \ker dF(p_0).$$

Wskazówka. Złożyć F z obrotem w dziedzinie, by sprowadzić sprawę do przypadku $\ker dF(p_0) = \mathbb{R}^m \times \mathbf{0}$.

Zadanie 6. Niech $s = (f, g)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ będzie funkcją klasy C^1 i załóżmy, że różniczka $df(x_0)$ jest odwracalna. Wykazać, że wówczas obraz (odpowiednio obciętej) funkcji s pokrywa się z pewnym wykresem klasy C^1, to znaczy

$$\{s(x) : x \in U\} = \{(y, h(y)) : y \in V\}$$

dla pewnych otoczeń $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(x_0) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz pewnej funkcji $h\colon V \to \mathbb{R}^m$ klasy C^1. Ponadto $dh(f(x_0)) = dg(x_0) \cdot (df(x_0))^{-1}$.

Zadanie 7. Niech $s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ będzie funkcją klasy C^1, której różniczka $ds(x_0)$ jest pełnego rzędu (czyli rzędu n). Oznaczmy jej obraz (po obcięciu do pewnej kuli) przez $I = \{s(x) : \|x - x_0\| < r\}$. Wykazać, że

$$T_{s(x_0)} I = \operatorname{im} ds(x_0) \quad \text{dla pewnego } r > 0.$$

Wskazówka. Sprowadzić do sytuacji z poprzedniego zadania przez złożenie z obrotem w obrazie.

Uwaga. W przyszłości poznamy *twierdzenie o rzędzie*: jeśli funkcja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1 ma w każdym punkcie ten sam rząd różniczki $\operatorname{rank} dF \equiv r$ (niekoniecznie $r = \min(n, k)$), to lokalnie po złożeniu z dyfeomorfizmami dziedziny i przeciwdziedziny F ma postać

$$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \ni (x, y) \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{k-r}.$$

Stanowi ono zatem jednocześnie uogólnienie TFO i TFU. Zainteresowanych odsyłam do skryptu Pawła Strzeleckiego.

Dyfeomorfizmy

Uwaga. Próbując znaleźć dyfeomorfizm między dwoma danymi obszarami, warto mieć w pamięci funkcje takie jak

$$e^x,\ \ln x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \frac{1}{x}$$

oraz dyfeomorfizmy opierające się na podstawieniu biegunowym

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (r, \alpha) \mapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \in \mathbb{R}^2$$

albo inwersji

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0} \ni x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}.$$

Całkiem wskazane są konstrukcje polegające na złożeniu wielu prostszych dyfeomorfizmów, jak i stosowanie dyfeomorfizmów trudno wypisywalnych wzorem (np. odwrotność podstawienia biegunowego).

Zadanie 1. Czy jeśli $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją klasy C^1, której różniczka w każdym punkcie jest odwracalna, to F jest dyfeomorfizmem? Uzasadnić prawdziwość takiego stwierdzenia dla $n = 1$ i wskazać kontrprzykład dla $n = 2$.

Zadanie 2. Uzasadnić, że inwersja $i\colon \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0} \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ zadana wzorem $i(x) = x/\|x\|^2$ jest dyfeomorfizmem. Sprawdzić, że obrazem kuli otwartej $\mathbf{B}_{\|p\|}(p)$ jest półprzestrzeń $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p\rangle > 1/2\}$

Zadanie 3. Wykazać, że podstawienie biegunowe $\Phi(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ po ograniczeniu do np. $\Phi\colon (-\pi/2, 0) \to (0, \infty) \times (-\infty, 0)$ jest dyfeomorfizmem.
Wskazówka. Wykazać, że jest bijekcją (a więc Φ^{-1} istnieje), a warunek $\Phi^{-1} \in C^1$ wywnioskować z TFO.

Zadanie 4. Skonstruować dyfeomorfizm podanego podzbioru $\mathbb{R}^2$ na całą płaszczyznę:

- $A = (-1, 1)^2$ (kwadrat)
- $B = \{y < x^3\}$ (podwykres funkcji klasy C^1)
- $C = \{x^2 + y^2 < 1\}$ (koło)

- $D = \{x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$ (półkole)
- $E = \{x^2 + y^2 < 1,\ x, y > 0\}$ (wycinek koła)
- $F = \{x^2 + y^2 < 1,\ y > \frac{3}{5}\}$ (odcinek koła)
- $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,t) : t \geqslant 1\}$ (płaszczyzna bez półprostej)
- $H = \{0 < y < x < 1\}$ (trójkąt)
- $I = \{|x|^3 + |y|^5 < 1\}$ (hm, coś pomiędzy kołem jednostkowym w normach $\|\cdot\|_3$ i $\|\cdot\|_5$)
- dowolny czworokąt o trzech kątach prostych
- dowolny czworokąt wypukły

Zadanie 5. Sprawdzić, że funkcja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}_1$ zadana wzorem $F(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1, ale już nie klasy C^2.
Wskazówka. Odwrotność też można wyrazić wzorem: $G(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$.

Zadanie 6. Niech

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

Wykazać, że nie istnieje dyfeomorfizm $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ przeprowadzający A na B.
Wskazówka. Zbadać stożki styczne tych dwóch zbiorów.

Zadanie 7. Niech $n \geqslant 2$. Wykazać, że funkcja

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^2}{x_2}, \frac{x_2^2}{x_3}, \ldots, \frac{x_n^2}{x_1}\right)$$

zadaje dyfeomorfizm zbioru $(0, \infty)^n$ z samym sobą.
Wskazówka. Powiązać F z przekształceniem liniowym

$$G(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (2y_1 - y_2, 2y_2 - y_3, \ldots, 2y_n - y_1).$$

Zadanie 8. Niech $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1 określoną na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i załóżmy, że różniczka $d_x F$ jest odwracalna dla każdego $x \in U$. Pokazać, że F jest przekształceniem otwartym, czyli:

$$V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ otwarty} \quad \Longrightarrow \quad F(V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ otwarty.}$$

Definicja (na potrzeby następnego zadania). Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest dowolnym podzbiorem, to powiemy, że $F\colon A \to \mathbb{R}^k$ jest klasy C^1, jeśli istnieje zbiór otwarty $A \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ i funkcja $\overline{F}\colon U \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1 takie, że $\overline{F}|_A = F$.
Ta definicja pozwala mówić np. o dyfeomorfizmach między dowolnymi zbiorami.

Zadanie 9. Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym, a $V \subseteq \mathbb{R}^n$ zbiorem otwartym, przy czym oba różne od $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że nie istnieje dyfeomorfizm $F\colon D \to V$ klasy C^1.
Wskazówka. Wykorzystać poprzednie zadanie.

Zadanie 10. ★ Niech $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1. Załóżmy, że istnieje stała $c > 0$ taka, że $\|F(x) - F(y)\| \geqslant c\|x - y\|$ dla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pokazać, że F jest dyfeomorfizmem.
Wskazówka. Sprawdzić, że obraz $F(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest jednocześnie otwarty i domknięty.

Zadanie 11. ☗ Niech $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1. Załóżmy, że istnieje stała $c > 0$ taka, że $\langle d_x F(v), v\rangle \geqslant c\|v\|^2$ dla $x, v \in \mathbb{R}^n$. Pokazać, że F jest dyfeomorfizmem.
Wskazówka. Rozważyć wielkość $\langle F(x) - F(y), x - y\rangle$ i sprowadzić sytuację do poprzedniego zadania.

Zadanie 12. ☗ Niech $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1 spełniającą warunek

$$M^{-1}\|x - y\| \leqslant \|F(x) - F(y)\| \leqslant M\|x - y\| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^n$$

z pewną stałą $M > 0$ (mówimy wówczas, że F jest bilipszycowska). Wykazać, że

$$\mathbf{B}_{r/M}(F(x)) \subseteq F\left(\mathbf{B}_r(x)\right) \subseteq \mathbf{B}_{Mr}(F(x)) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0.$$

Wskazówka. Funkcja $G = F^{-1}$ istnieje i też jest bilipszycowska.

Zadanie 13. ☗ Przekształcenie $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i liczba $0 < c < 1$ spełniają $\|dG(x)\| \leqslant c$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Wykazać, że $F(x) = x + G(x)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$.
Wskazówka. Skorzystać z twierdzenia Banacha o punkcie stałym (lub ew. z któregoś z poprzednich zadań).

Twierdzenie o funkcji odwrotnej i uwikłanej II

Zadanie 1. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana jest wzorem

$$f(x,y) = \Big(x^2 + y - y^2, 2xy + y\Big)\,.$$

Sprawdzić, że w otoczeniu punktu $(2,1)$ funkcja f ma funkcję odwrotną klasy C^1. Wyznaczyć różniczkę funkcji odwrotnej w punkcie $(4,5)$.

Zadanie 2. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana jest wzorem

$$f(x,y) = \Big(y - x^2, -x + y^2\Big)\,.$$

Sprawdzić, że w otoczeniu punktu $(0,0)$ funkcja f ma funkcję odwrotną $g = (u,v)$ klasy C^2. W punkcie $(0,0)$ wyznaczyć pochodne cząstkowe u, v do drugiego rzędu włącznie.
Wskazówka. Dwukrotnie zróżniczkować tożsamości $v - u^2 = x$ i $-u + v^2 = y$. To samo można uzyskać, uważnie różniczkując wzór na różniczkę funkcji odwrotnej.

Zadanie 3. Przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zadane jest wzorem

$$F(x,y) = Ax + By \quad \text{dla pewnych } A \in M_{n\times m},\ B \in M_{n\times n},$$

przy czym $\det B \neq 0$. Znaleźć globalne rozwiązanie $y(x)$ równania $F(x,y) = 0$.

Zadanie 4. Uzasadnić, że w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, -1)$ równanie $xy = 2 + z \cdot \ln y$ wyznacza y jako funkcję pozostałych zmiennych $y(x,z)$ klasy C^1. Obliczyć pochodne cząstkowe tej funkcji w punkcie $(x_0, z_0) = (2, -1)$.

Zadanie 5. Niech $F(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Znaleźć wszystkie punkty elipsy

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 3\Big\}\,,$$

wokół których E można przedstawić jako wykres funkcji $y(x) \in C^1$. Analogicznie, znaleźć takie punkty dla $x(y)$. Jaką interpretację geometryczną mają cztery punkty, w których jedno lub drugie nie jest możliwe?

Zadanie 6. Policzyć, ile jest funkcji $y(x)$ rozwiązujących $x^2 - y^2 = 0$, jeśli wymagamy, by

- y było klasy C^1;

- y było ciągłe;
- nic nie wymagamy.

Zadanie 7. Wykazać istnienie funkcji $y(x) \in C^2$ określonej na otoczeniu zera i spełniającej tożsamość

$$xe^y + xe^y = 2$$

i wyznaczyć $y''(0)$.

Zadanie 8. Niech $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^3 + z^4 - 2)$. Wykazać, że równanie $F(x, y, z) = 0$ ma wokół$(0, 1, -1)$ rozwiązanie $(y, z)(x)$ klasy C^1; obliczyć $y'(0)$ i $z'(0)$.

Zadanie 9. Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} e^u + v = xy \\ 2u + e^v = 2y - x \end{cases}$$

ma w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, 0)$ rozwiązanie $(u, v)(x, y)$ klasy C^1; obliczyć różniczkę tego przekształcenia w $(1, 1)$.

Podrozmaitości $\mathbb{R}^n$

Definicja. Podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazwiemy m-wymiarową podrozmaitością (bez brzegu), jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieją zbiory otwarte $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz dyfeomorfizm $\Phi\colon U \to V$ takie, że

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \mathbf{0})\,.$$

Mapą na M wokół $p \in M$ nazwiemy obcięcie $\Phi\colon U \cap M \to \mathbb{R}^m$ (ignorujemy $n - m$ zerowych współrzędnych). Układem współrzędnych nazwiemy odwrotność tego obcięcia.

Uwaga. Dla wygody będziemy od teraz *podrozmaitości* $\mathbb{R}^n$ nazywać po prostu *rozmaitościami*. W przyszłości (AM2.1, WGR, GR?) spotkamy się jednak z ogólniejszymi rozmaitościami, które nie są podzbiorami $\mathbb{R}^n$.
Powyższa konwencja nazewnictwa przyjmuje, że mapa jest przekształceniem z M w $\mathbb{R}^m$, a układ współrzędnych przekształceniem z $\mathbb{R}^m$ w M. Jako że jedno jest odwrotnością drugiego, nie należy się do tego bardzo przywiązywać.

Zadanie 1. Dla promieni $0 < r < R$ wprowadźmy torus

$$T_{r,R} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

otrzymany przez obrót okręgu $o((R, 0), r)$ w płaszczyźnie xz wokół osi z. Rozważmy też standardowy torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, czyli zbiór

$$\mathbb{T}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Uzasadnić, że jedno i drugie jest rozmaitością. Sprawdzić, że

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto ((R + rx_1)x_3, (R + rx_1)x_4, rx_2)$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{T}^2 \to T_{r,R}$.

Zadanie 2. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie m-wymiarową rozmaitością klasy C^1. Wykazać, że M można wokół dowolnego punktu $p \in M$ przedstawić jako wykres funkcji pewnych m współrzędnych, to znaczy istnieje m-wymiarowa podprzestrzeń $P \subseteq \mathbb{R}^n$ postaci

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{j_1} = 0, \ldots, x_{j_{n-m}} = 0\}$$

zbiór otwarty $U \subseteq P$, $r > 0$ oraz funkcja $f\colon U \to P^{\perp}$ klasy C^1 takie, że

$$M \cap \mathbf{B}_r(p) = \{x + f(x) : x \in U\}.$$

Zadanie 3. Czy zbiory

$$A = \{x^6 + y^5 + z^4 = 0\}, \quad B = \{x^6 + y^4 + z^3 = 0\}$$

w $\mathbb{R}^3$ są rozmaitościami klasy C^1?

Zadanie 4. Pokazać, że zbiór

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ xy + yz + zx = 8\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

jest krzywą (tj. 1-wymiarową rozmaitością) klasy C^1. Czy jest to krzywa spójna?
Wskazówka. Może być pomocne rozważenie wielkości $(x + y + z)^2$.

Zadanie 5. Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $A = (0, 0, 0)$ do punktu $B = (1, 0, 0)$. Podobnie w tym samym czasie Q przemieszcza się z $C = (0, 1, 0)$ do $D = (0, 1, 1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Znaleźć parametryzację M i uzasadnić, że jest to rozmaitość dwuwymiarowa w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 6. Niech $f_\lambda(x, y) = x^3 + \lambda(x^2 - y^2)$ dla dowolnych $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_0(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

(b) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

Zadanie 7. Wykazać, że $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - 12xy + 8y^3\}$ nie jest rozmaitością. Znaleźć punkty (możliwie niewiele), po których usunięciu M stanie się rozmaitością.

Zadanie 8. Pokazać, że zbiór macierzy ortogonalnych

$$O(n) = \{Q \in M_{n\times n} : Q^T Q = I\}$$

jest rozmaitością wymiaru $n(n-1)/2$. Opisać przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I.

Wskazówka. Funkcja $F(Q) = Q^T Q$ nie jest submersją jako funkcja $F\colon M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, ale jako $F\colon M_{n\times n} \to \mathrm{Sym}_{n\times n}$ już tak.

Zadanie 9. Niech $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie standardową sferą oraz

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad F(x, y, z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2).$$

Sprawdzić, że $F(\mathbb{S}^2)$ jest zwartą rozmaitością.

Uwaga. Jest to tzw. *płaszczyzna rzutowa.* Można podać jej prostszy opis: jest to sfera $\mathbb{S}^2$ z utożsamionymi punktami antypodycznymi (czyli parami x i $-x$).

Zadanie 10. ★ Niech M będzie standardową wstęgą Möbiusa w $\mathbb{R}^3$, np. opisana parametryzacją:

$$\begin{cases} x &= \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u \\ y &= \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u \\ z &= \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2} \end{cases} \qquad (0 \leqslant u < 2\pi,\ -1 < v < 1)$$

Wykazać, że choć M jest rozmaitością, to nie da się przedstawić jako poziomica submersji. Innymi słowy, nie istnieje zbiór otwarty $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ i funkcja $F\colon U \to \mathbb{R}$ klasy C^1, dla której

$$M = F^{-1}(0), \qquad \operatorname{rank} dF(x) = 2 \quad \text{dla } x \in M.$$

Ekstrema warunkowe

Twierdzenie Lagrange'a. Jeśli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ klasy C^1 jest określona na otwartym otoczeniu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ rozmaitości M i $f|_M$ ma ekstremum lokalne w $p \in M$, to gradient $\nabla f(p)$ jest prostopadły do T_pM.

Jeśli M jest (wokół p) zadane jako pewna poziomica submersji $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ (reprezentowanej przez m funkcji rzeczywistych $g = (g_1, \ldots, g_m)$), to warunek prostopadłości oznacza

$$\nabla f(p) \perp T_pM \iff \nabla f(p) \perp \ker dg(p) \iff \nabla f(p) \in \operatorname{lin}(\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_m(p)).$$

Ostatni warunek oznacza istnienie współczynników $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (zwanych *mnożnikami Lagrange'a*) spełniających $\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(p)$.

Zadanie 1. Znaleźć punkty na powierzchni $z = xy + 5$, które znajdują się najbliżej punktu $(0, 0, 0)$.

Zadanie 2. Jednym z punktów krytycznych w poprzednim zadaniu jest $(0, 0, 5)$. W tym punkcie druga różniczka $D^2_{(0,0,5)}f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest dodatnio określona. Czy wynika stąd, że f ma w $(0, 0, 5)$ związane minimum lokalne?

Zadanie 3. Weźmy elipsy

$$E_1 = \{x^2 + y^2 = 16\}, \quad E_2 = \{3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8\}.$$

Znaleźć najmniejszą możliwą odległość między punktami $(x, y) \in E_1$ i $(u, v) \in E_2$.

Zadanie 4. Niech

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} &\quad \text{ściśle wypukła klasy } C^1, \\ \Gamma^+ &= \{(x, y, z) : z > f(x)\}, \\ \Gamma^- &= \{(x, y, z) : z < f(x)\}, \\ \Gamma &= \{(x, y, z) : z = f(x)\}. \end{aligned}$$

Promień światła biegnie z prędkością c_- po linii prostej z punktu $A \in \Gamma_-$ do punktu $M \in \Gamma$, następnie załamuje się i biegnie z prędkością c_- po linii prostej z M do $B \in \Gamma^+$. Punkt $M \in \Gamma$ ma tę własność, że czas potrzebny na pokonanie łamanej AMB jest najmniejszy możliwy.

Niech n będzie prostą prostopadłą do Γ w M, a α_- i α_+ kątami między n a odpowiednio MA i MB. Wykazać, że A, B, n leżą w jednej płaszczyźnie oraz $\frac{\sin \alpha_-}{\sin \alpha_+} = \frac{c_-}{c_+}$.
Wskazówka. $\nabla |AM| = \frac{\overrightarrow{AM}}{|AM|}$

Zadanie 5. Niech $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 5z^2 = 4,\ xy = 1,\ x, y > 0\}$. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f \colon K \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x + y + z$.

Zadanie 6. Znaleźć kresy funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

- stosując twierdzenie Lagrange'a;
- wykorzystując parametryzację:

$$\gamma(t) = \frac{1}{3}\Big((5, 5, 5) + (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)\cos t + (1, 1, -2)\sin t\Big);$$

- szukając trzykrotnych wartości wielomianu $p(t) = t^3 - 5t^2 + 8t$.

Wskazówka. Może być pomocne rozważenie wielkości $xy + yz + zx$.

Zadanie 7. Funkcja

$$f \colon E \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy - x - y + 3$$

jest określona na trójkącie domkniętym $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 4)$. Znaleźć jej kresy.
Wskazówka. Już kiedyś sprawdziliśmy, że przyjmuje je na brzegu trójkąta.

Zadanie 8. Znaleźć kresy

$$f(x, y, z) = 7xy + 2yz + 2zx \quad \text{na zbiorze} \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9,\ x, y, z \geqslant 0\}.$$

Zadanie 9. Dana jest forma kwadratowa $Q(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x$ zadana przez macierz symetryczną $A \in M_{n \times n}$. Scharakteryzować kresy Q na sferze jednostkowej w $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 10. 🏠 (treningowe) Znaleźć kresy podanej funkcji na podanym zbiorze.

(a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$	$\{x^2 + y^2 = 1\}$
(b) $4xy$	$\{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
(c) $x^2 + 2y^2 + 3z^2$	$\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100\}$
(d) $x + y + z$	$\{x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$
(e) $x - 2y + 2z$	$\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
(f) xyz	$\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$
(g) xyz	$\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z = 0\}$
(h) xyz	$\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$
(i) xyz	$\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z = 1\}$
(j) xyz	$\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z \leqslant 1\}$
(k) xy^2z^3	$\{x + y + z = 6,\ x, y, z \geqslant 0\}$
(l) $\sin x \sin y \sin z$	$\{x + y + z = \frac{\pi}{2},\ x, y, z \geqslant 0\}$
(m) $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + \ldots + x_9x_{10}$	$\{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 10,\ x_i \geqslant 0\}$
(n) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}$	$\{x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + \ldots + x_9x_{10} = 45,\ x_i \geqslant 0\}$
(o) $\frac{x+y}{3x^2+y^2+1}$	$\mathbb{R}^2$
(p) $x_1x_2\ldots x_n$	$\{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,\ x_i \geqslant 0\}$

Całka Lebesgue'a à la Daniell – teoria

Uwaga. Całkę Lebesgue'a wprowadzimy w oparciu o tzw. schemat Daniella, z pominięciem pojęcia miary, pojęcia całki względem miary i konstrukcji miary Lebesgue'a. Ze względu na skąpość dostępnych źródeł streszczę tutaj najważniejsze punkty konstrukcji całki według schematu Daniella, jak i najważniejsze własności.

Charakter tego zestawu jest bardziej teoretyczny. Zamiast zadań typu egzaminacyjnego są tu raczej zadania polegające na uzupełnieniu łatwych fragmentów teorii.

Definicja. Dla ustalonego zbioru X, zbiór *funkcji elementarnych* H i *całka elementarna* I powinny spełniać następujące własności:

1. H jest pewną przestrzenią liniową złożoną z ograniczonych funkcji $h\colon X \to \mathbb{R}$, ze standardowymi działaniami dodawania i mnożenia.
2. Jeśli funkcja h należy do H, to funkcja $|h|$ również.
3. $I\colon H \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym.
4. (aksjomat nieujemności) Jeśli funkcja $h \in H$ jest nieujemna na X, to $Ih \geqslant 0$.
5. (aksjomat ciągłości) Jeśli $h_k \in H$ oraz $h_k \searrow 0$ na X, to $Ih_k \to 0$.

Zadanie 1. (przykład) Sprawdzić, że dla $X = [0,1]$ następujące pary spełniają aksjomaty:

[A] H – funkcje kawałkami stałe, $I(\sum a_j \mathbb{1}_{Q_j}) = \sum a_j |Q_j|$ (dla rozłącznych przedziałów $Q_1, \ldots, Q_l$)

[B] H – funkcje ciągłe, $I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (całka Riemanna)

Zadanie 2. Z aksjomatów wyprowadzić następujące wnioski (dla dowolnych $h, k \in H$):

$$h \leqslant k \text{ na } X \quad \Longrightarrow \quad Ih \leqslant Ik,$$
$$Ih \leqslant Ih^+ \leqslant I|h|,$$
$$|Ih| \leqslant I|h| \quad \text{(nierówność trójkąta).}$$

Definicja. Zbiór $Z \subseteq X$ jest miary zero (inaczej: jest zaniedbywalny), jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje niemalejący ciąg funkcji nieujemnych $z_k \in H$ spełniający

$$Iz_k \leqslant \varepsilon \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, \quad \lim z_k \geqslant 1 \text{ na } Z.$$

Powiemy, że jakaś własność zachodzi prawie wszędzie, jeśli zbiór tych $x \in X$, dla których nie zachodzi, ma miarę zero.
Uwaga! Mówimy o *zbiorach miary zero*, ale nigdzie nie ma mowy o żadnej mierze.

Zadanie 3. Sprawdzić, że suma przeliczalnie wielu zbiorów miary zero nadal jest miary zero.

Zadanie 4. Na przykładach [A] i [B] sprawdzić, że suma nieprzeliczalnie wielu zbiorów miary zero może już nie mieć tej własności.

Zadanie 5. Na przykładzie [A] wykazać następującą (spotykaną w innych źródłach) charakteryzację zbiorów miary zero: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje co najwyżej przeliczalna rodzina przedziałów $Q_j \subseteq [0, 1]$ spełniająca

$$\sum |Q_j| \leqslant \varepsilon, \quad Z \subseteq \bigcup Q_j.$$

Zadanie 6. Wykazać następujące wzmocnienie aksjomatu ciągłości. Załóżmy, że ciąg funkcji nieujemnych $h_k \in H$ jest nierosnący, ale $h_k \searrow 0$ jedynie prawie wszędzie (tzn. zbiór $Z = \{x \in X : h_k \not\to 0\}$ ma miarę zero). Wówczas również $Ih_k \searrow 0$.
Wskazówka. Przyjąć z_k jak w definicji zbioru miary zero oraz $M = \sup_{k,x} h_k(x)$ i zastosować aksjomat ciągłości do $\overline{h}_k = (h_k - Mz_k)^+$.

Zadanie 7. Jeśli dwie funkcje $h, l \in H$ różnią się jedynie na zbiorze miary zero, to $Ih = Il$.
Wskazówka. Zastosować poprzednie zadanie do ciągu $|h - l|$.

Zadanie 8. Wzmocnić aksjomat ciągłości jeszcze bardziej. Jeśli $h_k \in H$ oraz $h_k \searrow 0$ prawie wszędzie, to $Ih_k \searrow 0$.

Definicja. Funkcja $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ należy do klasy $L^+(X)$, jeśli istnieje ciąg funkcji $h_k \in H$, dla którego $h_k \nearrow f$ p.w. oraz ciąg Ih_k jest ograniczony. Definiujemy $If := \lim Ih_k$.

Funkcja $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ należy do klasy $L(X)$ (inaczej: jest sumowalna), jeśli $\varphi = f - g$ dla pewnych funkcji $f, g \in L^+(X)$. Definiujemy $I\varphi := If - Ig$.

Zadanie 9. Jeśli $f \in L^+$, to $f < \infty$ prawie wszędzie.
Wskazówka. Wziąć ciąg $h_k \nearrow f$ z definicji f i sprowadzić sprawę do przypadku $0 \leqslant h_k \nearrow f$ (na całym X), nastepnie przyjąć $z_k = h_k/M$ z odpowiednio dobranym $M > 0$.

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli $f, g \in L^+$ i $f \leqslant g$, a ciągi $h_k \nearrow f$, $l_m \nearrow g$ są jak w definicji, to $\lim h_k \leqslant \lim l_m$.
Wywnioskować, że wartość $If = \lim Ih_k$ nie zależy od wyboru ciągu h_k.
Wskazówka. Dla ustalonego k rozważyć granicę ciągu funkcji $(h_k - l_m)^+$.

Zadanie 11. Uzasadnić, że dla $\varphi \in L$ wartość $I\varphi$ nie zależy od wyboru rozkładu $\varphi = f - g$.

Zadanie 12. Sprawdzić, że klasa $L(X)$ jest podprzestrzenią liniową funkcji $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, zamkniętą na operacje $|\varphi|$, φ^+, φ^-, $\max(\varphi_1, \varphi_2)$, $\min(\varphi_1, \varphi_2)$.

Twierdzenie Leviego. Jeśli $\varphi_k \in L$, $I\varphi_k \leqslant C$ i $\varphi_k \nearrow \varphi$ p.w., to $\varphi \in L$ oraz $I\varphi = \lim I\varphi_k$.

Zadanie 13. Jeśli $\varphi \in L$, $\varphi \geqslant 0$ p.w. oraz $I\varphi = 0$, to $\varphi = 0$ prawie wszędzie.

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Jeśli $\varphi_k \in L$ oraz $\varphi_k \to \varphi$ p.w., a ponadto $|\varphi_k| \leqslant \varphi_0$ p.w. dla pewnej ustalonej funkcji $\varphi \in L$, to również $\varphi \in L$ oraz $I\varphi = \lim I\varphi_k$.
Wskazówka. Rozważyć funkcje $a_{kl} = \max(\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{k+l})$, $b_k = \lim_{l\to\infty} a_{kl}$ oraz $c = \lim_{k\to\infty} b_k$.

Zadanie 14. Przy dodatkowym założeniu $\mathbb{1}_X \in L(X)$ wywnioskować, że rodzina zbiorów mierzalnych

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \mathbb{1}_A \in L(X)\}$$

jest σ-ciałem, to znaczy

$$(1)\ \emptyset \in \mathcal{F}, \quad (2)\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}, \quad (3)\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}.$$

Następnie wywnioskować, że funkcja

$$\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mu(A) = I\mathbb{1}_A$$

jest miarą, to znaczy

$$(1)\ \mu(\emptyset) = 0, \quad (2)\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \text{ dla rozłącznej rodziny } A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}.$$

Mierzalność

Definicja. Funkcję $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy mierzalną, jeśli istnieje ciąg funkcji $f_k \in L(X)$, dla których $f_k \to f$ p.w. Równoważnie: $f_k \in H$.
Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy mierzalnym, jeśli funkcja $\mathbb{1}_A$ jest mierzalna.
W poniższych zadaniach ograniczamy się do całki Lebesgue'a.

Zadanie 1. Przy dodatkowym założeniu $\mathbb{1}_X \in L(X)$ sprawdzić, że σ-ciało $\mathcal{F}$ składa się dokładnie ze zbiorów mierzalnych (w ogólności zachodzi zawieranie).

Zadanie 2. Sprawdzić, że zbiór $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest miary zero. Pokazać, że jeśli A pokryjemy skończoną liczbą przedziałów, to suma ich długości wynosi co najmniej 1.

Zadanie 3. Sprawdzić, że zbiór Cantora $C \subseteq [0,1]$ jest miary zero; istnieją więc nieprzeliczalne zbiory miary zero w $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że wykres funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ jest zbiorem miary zero.
Wywnioskować, że dowolna podrozmaitość $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wymiaru $k < n$ ma miarę zero.

Zadanie 5. Uzasadnić, że każda funkcja monotoniczna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna.

Zadanie 6. Uzasadnić, że jeśli funkcja mierzalna $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma prawie wszędzie pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, to ona również jest mierzalna.

Zadanie 7. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, to zbiory $\{f > 0\}$, $\{f \geqslant 0\}$, $\{f = 0\}$ również.
Wskazówka. Dobrać ciąg funkcji schodkowych $h_k \to f$ i uzasadnić wzór

$$\{f > 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant N} \{h_k > \tfrac{1}{m}\}.$$

Zadanie 8. Załóżmy, że mierzalne są funkcje $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Wykazać, że mierzalne są funkcje

$$p(x) = f(x)\cdot g(x),$$
$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A, \\ g(x) & \text{dla } x \notin A, \end{cases}$$
$$f_v(x) = f(x-a) \quad \text{dla każdego } v \in \mathbb{R}^n.$$

Ponadto jeśli $f \in L^1$, to również $f_v \in L^1$ oraz $\int f_v = \int f$.

Zadanie 9. Wprowadźmy na $\mathbb{R}$ relację równoważności

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{Q}$$

oraz weźmy zbiór $A \subseteq [0,1]$, który z każdej klasy abstrakcji ma dokładnie jednego reprezentanta. Wykazać, że funkcja $\mathbb{1}_A$ nie może być mierzalna (w konsekwencji zbiór A również).

Zadanie 10. Sprawdzić, że wykres funkcji mierzalnej $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ jest zbiorem miary zero.
Wskazówka. Rozważyć wykresy funkcji $f(x) + u$ dla różnych $u \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Całka Lebesgue'a – twierdzenia o zbieżności

Notacja. Od teraz zamiast If piszemy $\int_X f$, w przypadku mniejszego zbioru całkowania (czyli zamiast $I(f\mathbb{1}_A)$) piszemy $\int_A f$. Jeśli potrzebne jest podkreślenie zmiennej, względem której całkujemy, piszemy $\int_A f\,\mathrm{d}x$.

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej. Załóżmy, że $0 \leqslant f_k \nearrow f$ p.w. na X oraz $f_k \in L^1(X)$ dla każdego k. Wówczas

$$\int_X f = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k.$$

Lemat Fatou. Jeśli funkcje $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ są mierzalne i nieujemne p.w., to

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k.$$

Wskazówka. Rozważyć funkcje $g_k = \inf(f_k, f_{k+1}, \ldots)$.

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Załóżmy, że funkcje $f_k, f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ są mierzalne oraz $|f_k| \leqslant g$ p.w. dla pewnej ustalonej funkcji $g \in L^1(X)$ (zwanej w tym kontekście *majorantą*). Jeśli $f_k \to f$ p.w., to

$$\int_X |f_k - f| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \qquad \int_X f_k \xrightarrow{k\to\infty} \int_X f.$$

Zadanie 1. (wędrujący garb) Znaleźć przykład funkcji $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których w lemacie Fatou nierówność jest ostra.
Uwaga. Ten przykład jest pożyteczny, bo pozwala zapamiętać, w którą stronę jest nierówność.

Zadanie 2. Czy funkcja $\frac{\sin x}{x}$ (dookreślona w zerze np. jedynką) jest całkowalna na $\mathbb{R}$?

Zadanie 3. Zbadać istnienie i wartość granic

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}\frac{2+(\sin(x^2))^k}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_{-2\pi k}^{2\pi k}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{k!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\exp(-2x^2)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{\pi}\exp(-(\cos x)^k)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^{\infty}\frac{\exp(tx)-1}{t}\cdot\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{t\to 0^+}\int_1^{\infty}x^{-3}\frac{\ln(1+tx)}{t}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 4. Niech $t_k\in[0,1]$ będzie dowolnym ciągiem. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{|x-t_k|}}$$

jest całkowalna.

Zadanie 5. Dana jest funkcja

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(u,v)=\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}x\sin(u-v+x)\,\mathrm{d}x.$$

Wyznaczyć pochodne cząstkowe f.

Zadanie 6. (bezwzględna ciągłość całki jako funkcji zbioru) Niech $f\in L^1(X)$, a μ będzie miarą, względem której całkujemy. Wówczas dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje liczba $\delta>0$ taka, że $\int_A f\leqslant\varepsilon$ dla dowolnego zbioru mierzalnego $A\subseteq X$ o mierze $\mu(A)\leqslant\delta$.

Dyskretne twierdzenie Fubiniego

Dyskretne twierdzenie Fubiniego. Suma wartości funkcji

$$f\colon \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}\to\mathbb{R}$$

$$\text{wynosi}\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(i,j).$$

Uwaga 1. Jest to szczególny przypadek twierdzenia Fubiniego dla $X=\{1,\dots,n\}$, $Y=\{1,\dots,m\}$ i odpowiednich miar liczących na X, Y i $X\times Y$; względnie dla całki I będącej sumowaniem wartości.

Uwaga 2. Powyższa równość, jakkolwiek pozbawiona treści analitycznej, ma w sobie nietrywialną zawartość kombinatoryczną. Zobaczymy to na przykładzie niżej.

Uwaga 3. Warto zwrócić uwagę na zmianę kolejności sumowania w poniższym przykładzie, gdyż to samo ma miejsce w przypadku całkowania.

Zadanie 1. Wykazać, że

$$n\cdot 2^0+(n-1)\cdot 2^1+\ldots+2\cdot 2^{n-2}+1\cdot 2^n=2^{n+1}-n-2.$$

Rozwiązanie. Naturalnie jest zapisać lewą stronę równości jako pojedynczą sumę

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i)\cdot 2^i.$$

Zapiszemy teraz liczbę $n-i$ jako sumę $n-i$ jedynek, czyli $n-i=\sum_{j=i+1}^{n}1$. Pozwala to zapisać lewą stronę jako podwójną sumę, a następnie zmienić kolejność sumowania:

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i)\cdot 2^i=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}2^i\overset{(\star)}{=}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}2^i.$$

Po zmianie kolejności suma okazuje się łatwa do policzenia:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}2^i=\sum_{j=1}^{n}\left(2^j-1\right)=2^{n+1}-1-2^0-n=2^{n+1}-n-2.$$

□

W tym przypadku zmiana zakresów sumowania w $(\star)$ nie sprawia trudności. W bardziej skomplikowanych sytuacjach można w tym miejscu dodać dodatkowe przejście przez postać

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}}2^i\cdot\mathbb{1}_{\{0\leqslant i<j\leqslant n\}},$$

by uniknąć pomyłki.

Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie Fubiniego. Jeśli $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, \mathrm{d}\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda_m(y) \right) \mathrm{d}\lambda_n(x).$$

Uwaga 1. Ta sama równość zachodzi z odwrotną kolejnością całkowania, i w ogóle z dowolnym rozbiciem $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ na dwie zmienne.
Uwaga 2. Całkowalność funkcji

$$\begin{aligned} &y \mapsto f(x,y) \quad (\text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n), \\ &x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda_m(y) \end{aligned}$$

jest częścią tezy twierdzenia.
Uwaga 3. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 1. (zasada Cavalieriego) Dla nieujemnej funkcji mierzalnej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) \, \mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Obliczyć całkę z indykatora zbioru $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t < f(x)\}$.

Zadanie 2. Dla funkcji mierzalnej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz $p \geqslant 1$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \mathrm{d}\lambda_n(x) = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) \, \mathrm{d}t.$$

Zadanie 3. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = |x|^\alpha$ jest całkowalna

- na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$?
- na dopełnieniu kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$?

Zadanie 4. Obliczyć pole koła o promieniu r, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2<r\}} \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Zadanie 5. Wykazać, że $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.
Wskazówka. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ z twierdzenia Fubiniego i zasady Cavalieriego.

Zadanie 6. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem dodatniej miary λ_n. Pokazać, że rzut ortogononalny na dowolną k-wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbb{R}^n$ ma dodatnią miarę λ_k.

Zadanie 7. Obliczyć całkę

$$\int_{[-1,1]^2} \left(1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3\right) \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Zadanie 8. Dany jest wielomian $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o współczynnikach z przedziału $[-1,1]$. Wykazać, że

$$\int_{[-1,1]^2} p(x,y) \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) \leqslant 8.$$

Czy stałą 8 można poprawić?

Zadanie 9. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \sum_{k=1} \frac{1}{k^2} \qquad \left(= \frac{\pi^2}{6}\right).$$

Wskazówka. Wykorzystać rozwinięcie funkcji $\frac{1}{1-t}$.

Zadanie 10. Niech $0 < a < b$. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Wskazówka. Zapisać różnicę $e^{-ax} - e^{-bx}$ jako całkę z pochodnej.

Zadanie 11. Obliczyć całkę $\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_2$, gdzie

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$, $\quad f(x,y) = (1-x+y)e^{-x}$;
(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x,\ x^2y \leqslant 16\}$, $\quad f(x,y) = 1$;
(c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$, $\quad f(x,y) = \frac{1}{x\sqrt{y}}$;
(d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant y\}$, $\quad f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Zadanie 12. (a) Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym przez parabolę $y = x^2$ i prostą $x + y = 2$. Obliczyć

$$\int_A 6x + 2y^2 \,\mathrm{d}\lambda_2(x, y).$$

(b) Niech B będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$. Obliczyć

$$\int_B xy^2 \,\mathrm{d}\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 13. Obliczyć całki

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$
$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1 + x^4} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$